Théorème de Gabber d'indépendance de l

rédigé par Weizhe Zheng

Mémoire de Master 2e année *
réalisé sous la direction du Professeur Luc Illusie

Sommaire

On expose ici le théorème de Gabber d'indépendance de l pour la cohomologie d'intersection d'un schéma propre équidimensionnel sur le spectre d'un corps fini (4.1). On suit [Fuji] à très peu près. Je remercie vivement mon directeur, Luc Illusie, qui m'a beaucoup aidé.

1 Suites récurrentes linéaires

On aura besoin de certaines propriétés élémentaires des suites.

Soient $\mathrm{P} \subset \mathbb{Z}$ une partie non vide stable par addition par $\mathbb{N}$ et E un corps. On désigne par E^{P} l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in \mathrm{P}}$ à valeurs dans E (*i. e.* des

∗. Soutenu le 1er juillet 2005.

Courriel : weizhe.zheng@math.u-psud.fr

applications de P vers E). On pose

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \mathrm{E}^{\mathrm{P}} & \to & \mathrm{E}^{\mathrm{P}} \\ & (a_n)_{n\in\mathrm{P}} & \mapsto & (a_{n+1})_{n\in\mathrm{P}}. \end{array}$$

Proposition 1.1. *Soit* $a = (a_n)_{n\in\mathrm{P}} \in \mathrm{E}^{\mathrm{P}}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe un polynôme* $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \in \mathrm{E}[\mathrm{X}]$ *à coefficient constant non-nul tel que* $\mathrm{Q}(\mathrm{T})a = 0$*.*

(b) *il existe* $r \geq 0$*,* $c_0, \ldots, c_r \in \mathrm{E}$*,* $c_0 c_r \neq 0$ *tels que*

$$\sum_{i=0}^{r} c_i a_{n+i} = 0 \textit{ pour tout } n \in \mathrm{P}.$$

(c) *le sous-*E*-espace vectoriel* $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a \subset \mathrm{E}^{\mathrm{P}}$ *est de dimension finie et* T *en est un automorphisme.*

Démonstration. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Si on pose $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{r} c_i \mathrm{X}^i$, alors $(\mathrm{Q}(\mathrm{T})a)_n = \sum_{i=0}^{r} c_i a_{n+i}$.

(a) et (b) $\Rightarrow$ (c) $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a$ est un sous-E-espace vectoriel de dimension finie, d'après (a). L'action de T en est injective, d'après (b).

(c) $\Rightarrow$ (a) On peut prendre comme Q(X) le polynôme mininal de T sur $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a$. □

Définition 1.2. Une suite $a \in \mathrm{E}^{\mathrm{P}}$ est dite récurrente linéaire si elle satisfait aux conditions équivalentes de 1.1. L'ensemble des suites récurrentes linéaires se note $\mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$.

Pour tout $\alpha \in \mathrm{E}^*$, $(\alpha^n)_{n\in\mathrm{P}} \in \mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$.

Corollaire 1.3. (i) $\mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$ *est un sous-*E*-espace vectoriel de* E^{P}*.*

(ii) *L'application de restriction* $\mathrm{Rl}(\mathbb{Z}, \mathrm{E}) \to \mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$ *est bijective.*

(iii) *Soit* E' *une extension de* E*. Si* $a \in \mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E}')$ *prend toutes ses valeurs dans* E*, alors* $a \in \mathrm{Rl}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$*.*

Démonstration. (i) (resp. (ii)) est clair d'après la condition (a) (resp. (b)).

Pour (iii), on utilise la condition (c). On a $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a \otimes_{\mathrm{E}} \mathrm{E}' \simeq \mathrm{E}'[\mathrm{T}]a$, donc $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a$ est de dimension finie sur E. On a une injection $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a \hookrightarrow \mathrm{E}'[\mathrm{T}]a$, ce qui donne l'injectivité de l'action de T sur $\mathrm{E}[\mathrm{T}]a$. □

2 Notations et rappels

Pour tout nombre premier, on choisit une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Soit F un corps de caractéristique $\chi_{\mathrm{F}} \neq l$. Pour un schéma X séparé de type fini sur Spec F, on définit les $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux constructibles sur X et la catégorie dérivée $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ (*cf.* [De3, 1.1] et [Eke]). Les catégories dérivées $\mathrm{D}^b_c(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$ sont stables par les six opérations $\mathrm{R}f_!, \mathrm{R}f_*, f^*, \mathrm{R}f^!, \otimes^{\mathrm{L}}, \mathrm{R}\mathcal{H}om$, et en particulier par le foncteur dualisant D. On normalise le dernier par

$$\mathrm{D_X K} = \mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathrm{K}, \mathrm{R}a^!\overline{\mathbb{Q}_l})$$

où $a : \mathrm{X} \to \operatorname{Spec} \mathrm{F}$.

On désigne par $\mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux. Pour un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on note $[\mathcal{F}]$ sa classe dans $\mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. L'application $\mathcal{F} \mapsto [\mathcal{F}]$ se prolonge en une application surjective

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})) &\to \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \\ \mathrm{K} &\mapsto [\mathrm{K}] = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q [\mathcal{H}^q(\mathrm{K})]. \end{aligned}$$

On désigne parfois l'image de K encore par K. Les six opérations sur $\mathrm{D}^b_c(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$ induisent les homomorphismes entre les groupes $\mathrm{K}(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$.

2.1 Perversité

On prend la perversité autoduale p et la t-structure $({}^p\mathrm{D}^{\leq 0}, {}^p\mathrm{D}^{\geq 0})$ sur $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ comme dans [BBD, 4.0]. On rappelle que pour $\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$,

$$\mathrm{K} \in {}^p\mathrm{D}^{\leq 0} \iff \mathcal{H}^q(i_x^*\mathrm{K}) = 0, \forall x \in \mathrm{X}, \forall q > -\delta(x),$$

$$\mathrm{K} \in {}^p\mathrm{D}^{\geq 0} \iff \mathcal{H}^q(i_x^!\mathrm{K}) = 0, \forall x \in \mathrm{X}, \forall q < -\delta(x),$$

où i_x est l'inclusion de $\{x\}$ dans X, $i_x^! = j^*\mathrm{R}i^!$ pour $\{x\} \xrightarrow{j} \overline{\{x\}} \xhookrightarrow{i} \mathrm{X}$, $\delta(x) = \dim \overline{\{x\}}$ [*ibid.*, 2.2.12 et 2.2.19].

Le foncteur dualisant $\mathrm{D_X}$ échange ${}^p\mathrm{D}^{\leq 0}$ et ${}^p\mathrm{D}^{\geq 0}$. Si on note $d = \dim \mathrm{X}$, alors $\mathrm{D}^{\leq -d} \subset {}^p\mathrm{D}^{\leq 0} \subset \mathrm{D}^{\leq 0}$, donc $\mathrm{D}^{\geq 0} \subset {}^p\mathrm{D}^{\geq 0} \subset \mathrm{D}^{\geq -d}$ par l'orthogonalité [*ibid.*, 1.3.4].

On note $\mathrm{Per}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ la catégorie des faisceaux pervers sur X. Tout objet de cette catégorie est de longueur finie [*ibid.*, 4.3.1(i)], donc

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) = \mathrm{K}(\mathrm{Per}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})) \tag{2.1.1}$$

est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphie des faisceaux pervers simples.

Soit $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ une immersion ouverte. Alors l'extension intermédiaire d'un faisceau pervers $\mathrm{K} \in \mathrm{Per}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ par j se calcule par la formule $j_{!*}\mathrm{K} = {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}$ [*ibid.*, 1.4.23], où $\mathrm{Y} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{X}$ est le fermée complémentaire. Si $f : \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_2$ est un morphisme dans $\mathrm{Per}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, alors $j_{!*}f = {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*f$. [1]

Notons que

$$\left\{\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \;\middle|\; i^*\mathrm{K} \in \mathrm{D}^{\leq -d-1}_{\mathrm{Y}}\right\} \subset \left\{\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \;\middle|\; i^*\mathrm{K} \in {}^p\mathrm{D}^{\leq -1}_{\mathrm{Y}}\right\},$$

où $d = \dim \mathrm{Y}$. On a donc un morphism de foncteurs

$$\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1} \to {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1} : \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Proposition 2.2. (i) *Si le morphisme* $\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_\beta \to {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_\beta$ *est un isomorphisme pour chaque* $\beta = 1, 2$, *alors on peut faire des identifications* $j_{!*}\mathrm{K}_\beta = \tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_\beta$, $\beta = 1, 2$ *et* $j_{!*}f = \tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*f$.

(ii) *Si* Y *est lisse purement de dimension* d *et les* $\mathcal{H}^e i^*\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_\beta$, $e \geq -d$, *sont lisses pour* $\beta = 1, 2$, *alors l'hypothèse de* (i) *est vraie.*

Démonstration. (i) On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*f"'] & {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_1 \arrow[d, "{}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*f"] \\
\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -d-1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_2 \arrow[r] & {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_2
\end{tikzcd}$$

(ii) [*ibid.*, 2.2.4 et 2.2.19] □

Dans le cas général, on peut calculer $j_{!*}$ en itérant 2.2.

1. Ceci découle de la factorisation du diagramme commutatif dans $\mathrm{Per}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$

$$\begin{tikzcd}
{}^pj_!\mathrm{K}_1 \arrow[r] \arrow[d, "{}^pj_!f"'] & {}^p\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_1 \arrow[d, "{}^p\mathrm{R}j_*f"] \\
{}^pj_!\mathrm{K}_2 \arrow[r] & {}^p\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_2
\end{tikzcd}$$

en le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{}^pj_!\mathrm{K}_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "{}^pj_!f"'] & {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_1 \arrow[r, tail] \arrow[d, "{}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*f"'] & {}^p\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_1 \arrow[d, "{}^p\mathrm{R}j_*f"] \\
{}^pj_!\mathrm{K}_2 \arrow[r, two heads] & {}^p\tau^{\mathrm{Y}}_{\leq -1}\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_2 \arrow[r, tail] & {}^p\mathrm{R}j_*\mathrm{K}_2
\end{tikzcd}$$

dont le carré à gauche est commutatif car celui à droite l'est.

Corollaire 2.3. *Supposons* F *parfait. Soient* A *un ensemble fini,* $(l_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ *une famille de nombres premiers* $\neq \chi_{\mathrm{F}}$*,* $(\mathrm{K}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \prod_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{Per}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$*. Alors il existe* $n \geq 0$ *et des immersions ouvertes*

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathrm{U}_1 \overset{j_2}{\hookrightarrow} \cdots \overset{j_n}{\hookrightarrow} \mathrm{U}_n = \mathrm{X}$$

vérifiant les conditions suivantes

(i) *Pour* $1 \leq m \leq n$*,* $\mathrm{Y}_m = \mathrm{U}_m \backslash \mathrm{U}_{m-1}$ *(équipé de la structure de sous-schéma réduit induite) est lisse sur* F *et purement de dimension* d_m*,* $d_1 > d_2 > \cdots > d_n \geq 0$*,* $\mathrm{K}_\alpha^{(m)} = \tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m-1} \mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}$*, et* $\mathcal{H}^e(i_m^! \mathrm{K}_\alpha^{(m)})$ *est lisse sur* Y_m*,* $\forall e \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathrm{A}$*, où* $i_m : \mathrm{Y}_m \hookrightarrow \mathrm{U}_m$*,* $\mathrm{K}_\alpha^{(m)} = j_{m!*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}$*,* $\mathrm{K}_\alpha^{(0)} = \mathrm{K}_\alpha$*. Donc*

$$j_{!*}\mathrm{K}_\alpha = \mathrm{K}_\alpha^{(n)} = \tau^{\mathrm{Y}_n}_{\leq -d_n-1} \mathrm{R}j_{n*} \cdots \tau^{\mathrm{Y}_1}_{\leq -d_1-1} \mathrm{R}j_{1*}\mathrm{K}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathrm{A}.$$

(ii) *Soient* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ *tels que* $l_{\alpha_1} = l_{\alpha_2}$ *et* $f : \mathrm{K}_{\alpha_1} \to \mathrm{K}_{\alpha_2}$ *un morphisme. Alors*

$$j_{!*}f = \tau^{\mathrm{Y}_n}_{\leq -d_n-1} \mathrm{R}j_{n*} \cdots \tau^{\mathrm{Y}_1}_{\leq -d_1-1} \mathrm{R}j_{1*}f.$$

(iii) *Si, en outre,* U *est lisse sur* F *purement de dimension* $d > \dim(\mathrm{X}-\mathrm{U})$ *et* $\mathcal{H}^e(\mathrm{K}_{\alpha_\beta})$ *est lisse sur* U*,* $\forall e \in \mathbb{Z}$*,* $\beta = 1, 2$*, alors* $\forall \beta = 1, 2$*,* $\mathrm{K}^{(m)}_{\alpha_\beta}$ *est concentré en degrés* $[-d, -d_m - 1]$ *pour* $1 \leq m \leq n$*, et*

$$\begin{aligned} j_{!*}\mathrm{K}_{\alpha_\beta} &= \tau_{\leq -d_n-1} \mathrm{R}j_{n*} \cdots \tau_{\leq -d_1-1} \mathrm{R}j_{1*}\mathrm{K}_{\alpha_\beta}, \\ j_{!*}f &= \tau_{\leq -d_n-1} \mathrm{R}j_{n*} \cdots \tau_{\leq -d_1-1} \mathrm{R}j_{1*}f. \end{aligned}$$

La condition (iii) ne sera pas utilisée dans la suite.

Démonstration. (*Cf.* [Tian, 1.5 ?]) On montre (i) et (ii) en même temps. (iii) en suit.

On peut supposer $\mathrm{U} \subsetneqq \mathrm{X}$. Par récurrence sur $\dim(\mathrm{X} - \mathrm{U})$, il suffit de montrer qu'il existe des immersions ouvertes

$$\mathrm{U} \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathrm{U}_1 \overset{j'}{\hookrightarrow} \mathrm{X}$$

telles que $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{U}_1 \backslash \mathrm{U}$ (réduit) soit lisse sur F et purement de dimension $d_1 > \dim(\mathrm{X} - \mathrm{U}_1)$, $j_{1!*}\mathrm{K}_\alpha = \tau^{\mathrm{Y}_1}_{\leq -d_1-1} \mathrm{R}j_{1*}\mathrm{K}_\alpha$, $j_{1!*}f = \tau^{\mathrm{Y}_1}_{\leq -d_1-1}\mathrm{R}j_{1*}f$, et que $\mathcal{H}^e(i_1^! j_{1!*}\mathrm{K}_\alpha)$ soit lisse sur Y_1, $\forall e \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, où $i_1 : \mathrm{Y}_1 \hookrightarrow \mathrm{U}_1$.

On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \backslash \mathrm{U}$ et lui donne la structure de schéma réduit induite. On prend un ouvert W de Y équidimensionnel tel qu'il soit lisse sur F, $\dim(\mathrm{Y} - \mathrm{W}) < \dim \mathrm{Y}$ et que $\mathcal{H}^e(j_\mathrm{W}^* i^* \mathrm{R}j_*\mathrm{K}_\alpha)$, $\mathcal{H}^e(j_\mathrm{W}^* \mathrm{R}i^! j_{!*}\mathrm{K}_\alpha)$ soient lisses sur W pour tout $e \in \mathbb{Z}$ et tout $\alpha \in \mathrm{A}$, où $i : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$, $j_\mathrm{W} : \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{Y}$. On pose $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U} \cup \mathrm{W}$. Alors $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{W}$ est lisse sur F et purement de dimension

$d_1 = \dim \mathrm{Y} > \dim(\mathrm{X} - \mathrm{U}_1)$, car $\mathrm{X} - \mathrm{U}_1 = \mathrm{Y} - \mathrm{W}$. On a le diagramme commutatif d'immersions

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "j_1"] \arrow[rr, bend left, "j"] & \mathrm{U}_1 \arrow[r, "j'"] & \mathrm{X} \\ & \mathrm{Y}_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "j_{\mathrm{W}}"] & \mathrm{Y} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Notons que

$$j_{\mathrm{W}}^* i^* \mathrm{R} j_* = i_1^* j'^* \mathrm{R} j'_* \mathrm{R} j_{1*} = i_1^* \mathrm{R} j_{1*},$$
$$j_{\mathrm{W}}^* \mathrm{R} i^! j_{!*} = \mathrm{R} i_1^! j'^* j'_{!*} j_{1!*} = \mathrm{R} i_1^! j_{1!*}.$$

Donc $\mathcal{H}^e(i_1^* \mathrm{R} j_{1*} \mathrm{K}_\alpha)$, $\mathcal{H}^e(i_1^! j_{1!*} \mathrm{K}_\alpha)$ sont lisses sur Y_1, $\forall e \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathrm{A}$. D'après 2.2, $j_{1!*}\mathrm{K}_\alpha = \tau_{\leq -d_1 - 1}^{\mathrm{Y}_1} \mathrm{R} j_{1*} \mathrm{K}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$ et $j_{1!*} f = \tau_{\leq -d_1-1}^{\mathrm{Y}_1} \mathrm{R} j_{1*} f$. $\square$

2.4

On fixe un corps fini $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^\nu$, et une clôture algébrique $\bar{k}$. Désormais, sauf mention expresse du contraire, on travaille sur k et on ne considère que des schémas séparés de type fini sur $\operatorname{Spec} k$. Pour un tel schéma X, on désigne par $|\mathrm{X}|$ l'ensemble des points fermés de X. Soit l un nombre premier $l \nmid q$. Pour un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X et $x \in |\mathrm{X}|$ (avec un point géométrique algébrique $\bar{x}$ de X localisé en x), le Frobenius géométrique $\mathrm{Fr}_x \in \mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$ agit sur la fibre géométrique $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ par transport de structure. On pose

$$\mathrm{L}_x(\mathcal{F}, t) = \det(1 - t^{\deg x} \mathrm{Fr}_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}_l}(t).$$

On peut le voir comme un élément de $1 + t\overline{\mathbb{Q}_l}[[t]]$, et on a alors

$$\mathrm{L}_x(\mathcal{F}, t) = \exp\Big(\sum_{n \geq 1} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_x^n, \mathcal{F}_{\bar{x}}) t^{n \deg x}/n\Big). \tag{2.4.1}$$

La définition de $\mathrm{L}_x(\mathcal{F}, t)$ et la formule (2.4.1) s'étendent à $\mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ par additivité, et l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) & \to & \prod_{x \in |\mathrm{X}|} (1 + t\overline{\mathbb{Q}_l}[[t]]) \\ \mathrm{K} & \mapsto & (\mathrm{L}_x(\mathrm{K}, t))_{x \in |\mathrm{X}|} \end{array}$$

est injectif [Lau, 1.1.2].

2.5 Pureté

On renvoie à [De3, 6.2] pour la notion de complexe pur (resp. mixte). Soit w un entier. On rappelle que les complexes mixtes de poids $\leq w$ sont stables par f^* et $\mathrm{R}f_!$, et que les complexes mixtes de poids $\geq w$ sont stables par $\mathrm{R}f^!$ et $\mathrm{R}f_*$.

On note D^b_m la catégorie des complexes mixtes. On note Per_m (resp. Per_w) la catégorie des faisceaux pervers mixtes (resp. purs de poids w), et K_m (resp. K_w) son groupe de Grothendieck. Alors K_m est aussi le groupe de Grothendieck de D^b_m. D'après [BBD, 5.1.7(ii) (resp. 5.3.1)], Per_m (resp. Per_w) est une sous-catégorie épaisse de Per, donc K_m (resp. K_w) est le sous-groupe abélien libre de K (2.1.1) engendré par les classes d'isomorphie des faisceaux pervers simples mixtes (resp. purs de poids w). Par conséquent $\mathrm{K}_m = \oplus_{w\in\mathbb{Z}}\mathrm{K}_w$. Plus généralement, pour tout intervalle (éventuellement non borné) $\mathrm{I} \subset \mathbb{Z}$, on peut définir Per_I et K_I. On a $\mathrm{K}_\mathrm{I} = \oplus_{w\in\mathrm{I}}\mathrm{K}_w$.

Théorème 2.6 (Gabber)**.** *Soit* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. *Pour que* K *soit de poids* $\leq w$ *(resp.* $\geq w$*), il faut et il suffit que chaque* ${}^p\mathrm{H}^i\mathrm{K}$ *soit de poids* $\leq w+i$ *(resp.* $\geq w+i$*).* [*ibid.*, 5.4.1]

Corollaire 2.7 (Gabber)**.** *Soit* f *un morphisme quasi-fini de schémas séparés de type fini sur* $\mathrm{Spec}\, k$. *Alors* $f_{!*}$ *préserve* $\mathrm{Per}_\mathrm{I}(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$. [*ibid.*, 5.4.3]

Corollaire 2.8. *On garde les notations et les hypothèses de* 2.3 *(pour* $\mathrm{F} = k$*). Soit* $\alpha \in \mathrm{A}$.

(i) *Si* $\mathrm{K}_\alpha \in \mathrm{Per}_{\leq w}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$, *alors pour* $1 \leq m \leq n$, $\mathcal{H}^e(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)})$ *est mixte de poids ponctuels* $\leq w - d_m - 1$, $\forall e \leq -d_m - 1$.

(ii) *Si* $\mathrm{K}_\alpha \in \mathrm{Per}_{\geq w}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$, *alors pour* $1 \leq m \leq n$, $\mathcal{H}^e(i_m^*\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)})$ *est mixte de poids ponctuels* $\geq w - d_m + 1$, $\forall e \geq -d_m$.

Démonstration. $\mathrm{K}_\alpha^{(m)} = \tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m-1}\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}$.

(i) D'après 2.7, $\mathrm{K}_\alpha^{(m)} \in \mathrm{Per}_{\leq w}(\mathrm{U}_m, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$. Pour $e \leq -d_m - 1$,

$$\mathcal{H}^e(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}) = \mathcal{H}^e(\mathrm{K}_\alpha^{(m)})$$

est mixte de poids $\leq w + e \leq w - d_m - 1$.

(ii) D'après 2.7, $\mathrm{K}_\alpha^{(m)} \in \mathrm{Per}_{\geq w}(\mathrm{U}_m, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$. On a un triangle distingué

$$\mathrm{R}i_m^!\mathrm{K}_\alpha^{(m)} \to i_m^*\mathrm{K}_\alpha^{(m)} \to i_m^*\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)} \to,$$

déduit du triangle distingué $\mathrm{R}i_m^!\mathrm{M} \to i_m^*\mathrm{M} \to i_m^*\mathrm{R}j_{m*}j_m^*\mathrm{M} \to$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{U}_m, \overline{\mathbb{Q}_{l_\alpha}})$. Pour $e \geq -d_m$, $\mathcal{H}^e(i_m^*\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}) = \mathcal{H}^{e+1}(\mathrm{R}i_m^!\mathrm{K}_\alpha^{(m)})$ est donc mixte de poids ponctuels $\geq w + e + 1 \geq w - d_m + 1$, car $\mathrm{R}i_m^!\mathrm{K}_\alpha^{(m)}$ est mixte de poids $\geq w$ et à faisceaux de cohomologie lisses. □

Lemme 2.9. *Soient* D *une catégorie triangulée munie d'une t-structure* $({}^{\mathrm{P}}\mathrm{D}^{\leq 0}, {}^{\mathrm{P}}\mathrm{D}^{\geq 0})$, $\mathrm{K} \xrightarrow{f} \mathrm{L} \xrightarrow{g} \mathrm{M} \xrightarrow{h}$ *un triangle distingué dans* D, $d \in \mathbb{Z}$ *tel que le cobord* ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^d(h) : {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^d(\mathrm{M}) \to {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{d+1}(\mathrm{K})$ *soit nul. Alors on a un diagramme des 9*

(2.9.1)
$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{K} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}f"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{L} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}g"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\mathrm{K} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{L} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{M} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & {} \\
{}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}\mathrm{K} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}f"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}\mathrm{L} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}g"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont des triangles distingués canoniques.

Démonstration. On complète le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{K} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}f"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{L} \arrow[d] \\
\mathrm{K} \arrow[r, "f"] & \mathrm{L}
\end{tikzcd}$$

en un diagramme des 9

(2.9.2)
$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{K} \arrow[r, "{}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}f"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq d}\mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M}_1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\mathrm{K} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{L} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{M} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & {} \\
{}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}\mathrm{K} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\tau_{>d}\mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M}_2 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

dont les deux premières colonnes sont des trianlges distingués canoniques. La première (resp. troisième) ligne implique que $\mathrm{M}_1 \in {}^{\mathrm{P}}\mathrm{D}^{\leq d}$ (resp. $\mathrm{M}_2 \in {}^{\mathrm{P}}\mathrm{D}^{\geq d}$). Le diagramme des suites exactes longues donne alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^d\mathrm{M} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{d+1}\mathrm{K} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^d\mathrm{M}_2 \arrow[r] \arrow[d] & {}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{d+1}\mathrm{K} \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

qui implique ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^d\mathrm{M}_2 = 0$, donc $\mathrm{M}_2 \in {}^{\mathrm{P}}\mathrm{D}^{>d}$. En utilisant [BBD, 1.1.9], on voit alors que (2.9.2) s'identifie à un diagramme de la forme (2.9.1). □

Corollaire 2.10. *Soit $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ un morphisme quasi-fini. Alors le foncteur*

$$f_{!*} : \mathrm{Per}_{[w,w+1]}(\mathrm{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to \mathrm{Per}_{[w,w+1]}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$$

est exact.

Démonstration. Le cas f fini étant trivial, on peut supposer que f soit une immersion ouverte $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$. On se donne une suite exacte courte $0 \to \mathrm{K}_1 \xrightarrow{g_1} \mathrm{K}_2 \xrightarrow{g_2} \mathrm{K}_3 \to 0$ dans $\mathrm{Per}_{[w,w+1]}(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, et on cherche à montrer que la suite déduite $0 \to j_{!*}\mathrm{K}_1 \to j_{!*}\mathrm{K}_2 \to j_{!*}\mathrm{K}_3 \to 0$ est exacte.

On prend des U_m, $0 \leq m \leq n$, comme dans 2.3 et on montre l'exactitude de

$$0 \to \mathrm{K}_1^{(m)} \xrightarrow{g_1^{(m)}} \mathrm{K}_2^{(m)} \xrightarrow{g_2^{(m)}} \mathrm{K}_3^{(m)} \to 0 \tag{2.10.1}$$

par récurrence sur m. Le cas $m = 0$ est tautologique. On suppose l'exactitude de (2.10.1) établie pour $m-1$, $1 \leq m \leq n$. Alors on a un triangle distingué

$$\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_1^{(m-1)} \xrightarrow{\mathrm{R}j_{m*}g_1^{(m-1)}} \mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_2^{(m-1)} \xrightarrow{\mathrm{R}j_{m*}g_2^{(m-1)}} \mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_3^{(m-1)} \xrightarrow{h} .$$

D'après 2.3,

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_\alpha^{(m)} &= \tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m-1}\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_\alpha^{(m-1)}, \alpha = 1,2,3, \\
g_\alpha^{(m)} &= \tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m-1}\mathrm{R}j_{m*}g_\alpha^{(m-1)}, \alpha = 1,2.
\end{aligned}$$

Par définition, $\tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m-1} = {}^{\mathrm{P}}\tau_{\leq -d_m-1}$, où P est la t-structure sur U_m obtenue par recollement des t-structures $(\mathrm{D}^b_c(\mathrm{U}_m, \overline{\mathbb{Q}_l}), 0)$ et

$$(\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathrm{Y}_m, \overline{\mathbb{Q}_l}), \mathrm{D}^{\geq 0}(\mathrm{Y}_m, \overline{\mathbb{Q}_l})).$$

Notons [*ibid.*, 1.4.13]

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{-d_m-1}(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_3^{(m-1)}) &= i_{m*}\mathcal{H}^{-d_m-1}(i_m^*\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_3^{(m-1)}), \\
{}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{-d_m}(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_1^{(m-1)}) &= i_{m*}\mathcal{H}^{-d_m}(i_m^*\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}_1^{(m-1)}).
\end{aligned}$$

D'après 2.8, $\mathcal{H}^{-d_m-1}(i_m^* \mathrm{R} j_{m*} \mathrm{K}_3^{(m-1)})$ est mixte de poids ponctuels $\leq w - d_m$, $\mathcal{H}^{-d_m}(i_m^* \mathrm{R} j_{m*} \mathrm{K}_1^{(m-1)})$ est mixte de poids ponctuels $\geq w - d_m + 1$. Donc ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{-d_m-1}(h) = 0$. D'après 2.9, on a alors un triangle distingué

$$\mathrm{K}_1^{(m)} \xrightarrow{g_1^{(m)}} \mathrm{K}_2^{(m)} \xrightarrow{g_2^{(m)}} \mathrm{K}_3^{(m)} \to,$$

qui donne l'exactitude de (2.10.1). □

Remarque 2.11. L'opération $f_{!*}$ sur $\mathrm{Per}_w(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$ induit donc un homomorphisme des groupes de Grothendieck $\mathrm{K}_w(-, \overline{\mathbb{Q}_l})$, et on définit un homomorphisme $f_{!*}$ sur $\mathrm{K}_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ en prenant la somme directe. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}(\mathrm{Per}_{[w,w+1]}(\mathrm{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})) & \xrightarrow{f_{!*}} & \mathrm{Ob}(\mathrm{Per}_{[w,w+1]}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{K}_m(\mathrm{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l}) & \xrightarrow{f_{!*}} & \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \end{array}$$

Quand f est fini, cette définition coïncide avec le f_* virtuel restreint à K_m.

Proposition 2.12. *Soient* $\mathrm{K} \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, $i : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *une immersion fermée et* $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *l'ouvert complémentaire. Alors* K *admet une unique décomposition* $\mathrm{K} = j_{!*}\mathrm{K}' \oplus i_*\mathrm{K}''$, *où* $\mathrm{K}' \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, $\mathrm{K}'' \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{Y}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. [*ibid.*, 5.3.11]

Proposition 2.13. *Soient* $\mathrm{K}, \mathrm{L} \in \mathrm{D}_m^b(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *purs de poids w. Alors le morphisme* $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \mathrm{L}[1]) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_{\bar{k}}, \mathrm{L}_{\bar{k}}[1])$ *est nul.* [*ibid.*, 5.1.15(iii)]

Corollaire 2.14. *Soit* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}_m^b(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *pur de poids w. Alors*

$$\det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathrm{K}_{\bar{k}})) = \prod_{e \in \mathbb{Z}} \det\Big(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, ({}^p\mathrm{H}^e\mathrm{K}_{\bar{k}})[-e])\Big).$$

Démonstration. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, on a un morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{fr}^*\, {}^p\tau_{\leq d}\mathrm{K}_{\bar{k}} & \longrightarrow & \mathrm{fr}^*\, \mathrm{K}_{\bar{k}} & \longrightarrow & \mathrm{fr}^*\, {}^p\tau_{>d}\mathrm{K}_{\bar{k}} & \xrightarrow{0} & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Fr}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Fr}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Fr}} & & \\ {}^p\tau_{\leq d}\mathrm{K}_{\bar{k}} & \longrightarrow & \mathrm{K}_{\bar{k}} & \longrightarrow & {}^p\tau_{>d}\mathrm{K}_{\bar{k}} & \xrightarrow{0} & \end{array}$$

où la nullité des flèches de degrés 1 découle de 2.6 et de 2.13. Alors on a un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{\leq d}\mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}"'] & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}"'] & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{>d}\mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}"'] & {} \\
\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{\leq d}\mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{>d}\mathrm{K}_{\bar{k}}) \arrow[r, "0"] & {}
\end{tikzcd}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathrm{K}_{\bar{k}})) \\
&\qquad = \det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{\leq d}\mathrm{K}_{\bar{k}}))\det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, {}^p\tau_{>d}\mathrm{K}_{\bar{k}})).
\end{aligned}$$

□

3 (E, I)-compatibilité

Soit E un corps, I une partie de

$$\left\{(l, \iota) \,\middle|\, l \nmid q \text{ un nombre premier}, \iota : \mathrm{E} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l} \text{ un plongement de corps}\right\}.$$

Définition 3.1. On dit qu'un système $(t_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \overline{\mathbb{Q}_l}$ est (E, I)-compatible (ou E-compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) s'il existe $c \in \mathrm{E}$ tel que $t_{(l,\iota)} = \iota(c)$ pour tout $(l, \iota) \in \mathrm{I}$.

Remarque 3.2. Si P est comme dans §1, $(a_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{Rl}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ tel que $(a_{(l,\iota),n})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ E-compatible $\forall n \in \mathrm{P}$, alors $(a_{(l,\iota),n})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ est E-compatible $\forall n \in \mathbb{Z}$, d'après 1.3(ii) et (iii).

Définition 3.3. Soit X un schéma séparé de type fini sur $k = \mathbb{F}_q$. On dit qu'un système $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est (E, I)-compatible (ou E-compatible) si pour tout $x \in |\mathrm{X}|$ et tout $n \geq 1$, $(\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_x^n, (\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{\bar{x}}))_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \overline{\mathbb{Q}_l}$ est (E, I)-compatible.

D'après (2.4.1), $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})$ est E-compatible si et seulement si pour tout $x \in |\mathrm{X}|$, il existe $s_x \in \mathrm{E}[[t]]$ tel que $\mathrm{L}_x(\mathrm{K}_{(l,\iota)}, t) = \iota(s_x)$ pour tout $(l, \iota) \in \mathrm{I}$. Ici on a étendu ι en un plongement d'anneaux $\mathrm{E}[[t]] \to \overline{\mathbb{Q}_l}[[t]]$.

Les systèmes E-compatibles forment un sous-anneau de $\prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$.

Exemple 3.4. $(\overline{\mathbb{Q}_l})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ est E-compatible. Plus généralement, pour $b \in \mathrm{E}^*$ tel que $\iota(b)$ soit une unité l-adique $\forall (l, \iota) \in \mathrm{I}$, le système $(\overline{\mathbb{Q}_l}^{(\iota(b))})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ [De3, 1.2.7] est E-compatible, car les traces locales sont $\iota(b)$.

3.5 Stabilités

La E-compatibilité est stable par les six opérations et donc par le foncteur dualisant.

Théorème 3.6. *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de schémas séparés de type fini sur* k *et* $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in \mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *un système* (E, I)*-compatible sur* X*. Alors* $(\mathrm{R}f_*\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}, (\mathrm{R}f_!\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathrm{Y}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *sont des systèmes* (E, I)*-compatibles sur* Y*. On a des résultats similaires pour* $f^*, \mathrm{R}f^!$ *et pour* $\otimes^{\mathrm{L}}, \mathrm{R}\mathcal{H}om, \mathrm{D}$.

Esquisse de la démonstration. Les résultats pour $\otimes^{\mathrm{L}}$ et f^* sont triviaux. Pour $\mathrm{R}f_!$ on utilise la formule des traces

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_y, (\mathrm{R}f_!\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{\bar{y}}) = \sum_{x\in \mathrm{X}_y(\mathbb{F}_{q^n})} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_x, (\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{\bar{x}}), \forall y \in \mathrm{Y}(\mathbb{F}_{q^n}), n \geq 1.$$

Il reste à montrer le résultat pour D.

On prend un système $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ E-compatible. Il suffit de voir la E-compatibilité de $(\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_x, (\mathrm{DK}_{(l,\iota)})_{\bar{x}}))_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ pour chaque $x \in \mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^n})$, $n \geq 1$. Le problème est local. Par dévissage, on peut supposer que $\mathrm{X} = \mathrm{A}$ soit une variété abélienne et $x = 0_{\mathrm{A}} \in \mathrm{A}(k)$ soit l'origine. On définit $f_{(l,\iota),n}, g_{(l,\iota),n} : \mathrm{A}(k) \to \overline{\mathbb{Q}_l}$ pour $n \geq 1$ par

$$\begin{aligned} f_{(l,\iota),n}(a) &= \sum_{b\in\mathrm{A}(\mathbb{F}_{q^n}), \mathrm{T}_n(b)=a} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_b, (\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{\bar{b}}), \\ g_{(l,\iota),n}(a) &= \sum_{b\in\mathrm{A}(\mathbb{F}_{q^n}), \mathrm{T}_n(b)=-a} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_b, (\mathrm{DK}_{(l,\iota)})_{\bar{b}}), \end{aligned}$$

où $\mathrm{T}_n : \mathrm{A}(\mathbb{F}_{q^n}) \to \mathrm{A}(\mathbb{F}_q)$ est la trace. Il suffit de voir la E-compatibilité de $(g_{(l,\iota),1}(0))$.

On sait la E-compatibilité de $(f_{(l,\iota),n}(0))_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ par hypothèse et on veut démontrer la E-compatibilité de $(g_{(l,\iota),n}(0))_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$. D'après 3.2, il suffit donc de trouver pour chaque $(l, \iota) \in \mathrm{I}$ une $s_{(l,\iota)} \in \mathrm{Rl}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ telle que $s_{(l,\iota),n} = f_{(l,\iota),n}(0)$, $s_{(l,\iota),-n} = g_{(l,\iota),n}(0)$ pour tout $n \geq 1$. (l, ι) étant fixé, on ne l'indique plus dans les indices.

Pour une fonction $f : \mathrm{A}(k) \to \overline{\mathbb{Q}_l}$, on définit la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}(f)(\rho) = \sum_{a\in\mathrm{A}(k)} f(a)\rho(a),$$

où $\rho : \mathrm{A}(k) \to \overline{\mathbb{Q}_l}^*$ est un caractère. On va montrer que pour tout ρ, il existe $(\mathrm{S}_n(\rho))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Rl}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ telle que $\mathrm{S}_n(\rho) = \mathcal{F}(f_n)(\rho)$, $\mathrm{S}_{-n}(\rho) = \mathcal{F}(g_n)(\rho)$ pour

$n \geq 1$. On prend $s_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{S}_n)(0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $s \in \mathrm{Rl}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ d'après 1.3(i).

En effet, par la formule des traces,

$$\mathcal{F}(f_n)(\rho) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}^n, \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{A}_{\bar{k}}, \mathrm{K} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{L}_\rho)),$$

$$\mathcal{F}(g_n)(\rho) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}^n, \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{A}_{\bar{k}}, \mathrm{DK} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{L}_{\rho^{-1}})),$$

où $\mathcal{L}_\rho$ est le $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau lisse de rang 1 correspondant à ρ [SGA $4\frac{1}{2}$, Sommes trig.]. Le résultat découle donc de la dualité entre $\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{A}_{\bar{k}}, \mathrm{K} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{L}_\rho)$ et

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{A}_{\bar{k}}, \mathrm{DK} \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{L}_{\rho^{-1}}).$$

□

Pour les détails, on renvoie à [Fuji, §3].

Exemple 3.7. Pour tout schéma X séparé de type fini sur k,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l))$$

est dans $\mathbb{Q}$ (et même dans $\mathbb{Z}$, *cf.* 5.1) et indépendant de l.

Exemple 3.8. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ et on choisit un I. On fixe un caractère additif non-trivial $\psi_0 : \mathbb{F}_p \to \mathrm{E}^*$ et on pose $\psi_{(l,\iota)} : \iota \circ \psi_0 \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} : k \to \overline{\mathbb{Q}_l}^*$, $(l, \iota) \in \mathrm{I}$. On considère $\mathrm{A} = \mathbb{A}^1_k$ et $\mathcal{L}_{\psi_{(l,\iota)}}$ sur A. Alors $(\mathcal{L}_{\psi_{(l,\iota)}})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ est un système E-compatible.

Soient $\mathrm{V} = \mathbb{A}^d_k$, V' son dual, $f : \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \to \mathrm{A}$ l'accouplement canonique, et $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{D}^b_c(\mathrm{V}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ un système E-compatibilité. D'après 3.6, les transformées de Fourier-Deligne

$$\mathcal{F}_{\psi_{(l,\iota)}} \mathrm{K}_{(l,\iota)} = \mathrm{R}p_{2!}(p_1^* \mathrm{K}_{(l,\iota)} \otimes^{\mathrm{L}} f^* \mathcal{L}_{\psi_{(l,\iota)}})[d]$$

forment un système E-compatible sur V', où $p_1 : \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$, $p_2 : \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \to \mathrm{V}'$ sont des projections.

La E-compatibilité est également stable par l'extension intermédiaire virtuelle (2.11) par un morphisme quasi-fini pour les K_m.

Théorème 3.9. *Soient $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ un morphisme quasi-fini de schémas séparés de type fini sur k, $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}_m(\mathrm{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ un système* E-*compatible sur* Z. *Alors $(f_{!*}\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est un système* E-*compatible sur* X.

Démonstration. D'après 3.6, on peut supposer que f soit une immersion ouverte $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$. On peut supposer $\sharp\mathrm{I} = 1$ ou 2.

(a) Cas où il existe $w \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\mathrm{K}_{(l,\iota)} \in \mathrm{K}_w(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ pour tout $(l,\iota) \in \mathrm{I}$. On écrit $\mathrm{K}_{(l,\iota)} = [\mathrm{L}_{(l,\iota),1}] - [\mathrm{L}_{(l,\iota),2}]$, où $\mathrm{L}_{(l,\iota),\alpha} \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{U}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, $\alpha = 1, 2$, $(l,\iota) \in \mathrm{I}$. On applique 2.3 (pour $\mathrm{A} = \mathrm{I} \times \{1,2\}$) et on pose $\mathrm{K}^{(m)}_{(l,\iota)} = [\mathrm{L}^{(m)}_{(l,\iota),1}] - [\mathrm{L}^{(m)}_{(l,\iota),2}]$, $0 \leq m \leq n$. Alors $j_{!*}\mathrm{K}_{(l,\iota)} = \mathrm{K}^{(n)}_{(l,\iota)}$. On montre la E-compatibilité de $(\mathrm{K}^{(m)}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ par récurrence sur m.

Le cas $m = 0$ est vide. On suppose la E-compatibilité de $(\mathrm{K}^{(m-1)}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ établie, $1 \leq m \leq n$. $\mathrm{L}^{(m)}_{(l,\iota),\alpha} = \tau^{\mathrm{Y}_m}_{\leq -d_m - 1} \mathrm{R}j_{m*}\mathrm{L}^{(m-1)}_{(l,\iota),\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. Pour tout $x \in |\mathrm{U}_{m-1}|$, $\mathrm{L}_x(\mathrm{K}^{(m)}_{(l,\iota)}, t) = \mathrm{L}_x(\mathrm{K}^{(m-1)}_{(l,\iota)}, t)$. D'après 2.8, pour tout $y \in |\mathrm{Y}_m|$, $\mathrm{L}_y(\mathrm{K}^{(m)}_{(l,\iota)}, t)$ peut être extrait de $\mathrm{L}_y(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}^{(m-1)}_{(l,\iota)}, t)$ comme la partie de poids $\leq w - d_m - 1$, $(l,\iota) \in \mathrm{I}$. D'après 3.6, $(\mathrm{R}j_{m*}\mathrm{K}^{(m-1)}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ est E-compatible. Donc $(\mathrm{K}^{(m)}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ l'est aussi.

(b) Cas général. Le résultat découle de (a) et de 3.10, car par définition,

$$f_{!*} = \bigoplus_{w\in\mathbb{Z}} i_{w,\mathrm{X}} f_{!*} p_{w,\mathrm{U}},$$

avec des notations de 3.10. □

Lemme 3.10. *Soit w un entier. La projection $p_{w,\mathrm{X}} : \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, -) \to \mathrm{K}_w(\mathrm{X}, -)$ et l'inclusion $i_{w,\mathrm{X}} : \mathrm{K}_w(\mathrm{X}, -) \to \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, -)$ préservent la* E-*compatibilité.*

Démonstration. Le résultat pour i_w est trivial. On montre le résultat pour p_w simultanément pour tout $w \in \mathbb{Z}$. On peut supposer $\sharp\mathrm{I} = 1, 2$.

(a) Un cas spécial. On suppose X lisse sur k purement de dimemsion d. Soit $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ E-compatible avec $\mathrm{K}_{(l,\iota)} = \sum_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{K}_{(l,\iota),w}$, $\mathrm{K}_{(l,\iota),w} = [\mathrm{L}_{(l,\iota),w,1}] - [\mathrm{L}_{(l,\iota),w,2}]$, où $\mathrm{L}_{(l,\iota),w,\alpha} \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ et $\mathcal{H}^e(\mathrm{L}_{(l,\iota),w,\alpha})$ lisse sur X, $\forall e \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 1, 2$, $w \in \mathbb{Z}$, $(l,\iota) \in \mathrm{I}$. Alors $\mathrm{L}_x(\mathrm{K}_{(l,\iota),w}, t)$ peut être extrait de $\mathrm{L}_x(\mathrm{K}_{(l,\iota)}, t)$ comme la partie de poids $w - d$, $\forall x \in |\mathrm{X}|$. Donc $\forall w \in \mathbb{Z}$, les $p_w(\mathrm{K}_{(l,\iota)}) = \mathrm{K}_{(l,\iota),w}$, $(l,\iota) \in \mathrm{I}$, forment un système E-compatible.

(b) Cas général. On peut supposer X réduit. On fait une récurrence noethérienne. Le résultat pour $p_{w,\emptyset}$ étant trivial, on suppose le résultat pour $p_{w,\mathrm{Y}}$ établi pour tout fermé $\mathrm{Y} \subsetneqq \mathrm{X}$ (réduit).

On prend $(\mathrm{K}_{(l,\iota)})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \in \prod_{(l,\iota)\in\mathrm{I}} \mathrm{K}_m(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ un système E-compatible. On pose $\mathrm{K}_{(l,\iota)} = \sum_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{K}_{(l,\iota),w}$, $\mathrm{K}_{(l,\iota),w} = [\mathrm{L}_{(l,\iota),w,1}] - [\mathrm{L}_{(l,\iota),w,2}]$ où $\mathrm{L}_{(l,\iota),w,\alpha} \in \mathrm{Per}_w(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$, $\alpha = 1, 2$. On prend un ouvert non vide $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ lisse sur k purement de dimemsion d tel que $\mathcal{H}^e(j^*\mathrm{L}_{(l,\iota),w,\alpha})$ soit lisse sur U, $\forall e \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 1, 2$, $w \in \mathbb{Z}$, $(l,\iota) \in \mathrm{I}$, et $i : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ le fermé complémentaire. Alors $\forall w \in \mathbb{Z}$, $(j^*\mathrm{K}_{(l,\iota),w})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ est un système E-compatible sur U, d'après (a). Donc

$(j_{!*}j^*\mathrm{K}_{(l,\iota),w})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ en est un sur X, d'après 3.9(a). D'après 2.12,

$$\mathrm{K}_{(l,\iota),w} = j_{!*}j^*\mathrm{K}_{(l,\iota),w} + i_*\mathrm{K}''_{(l,\iota),w}, \tag{3.10.1}$$

où $\mathrm{K}''_{(l,\iota),w} \in \mathrm{K}_w(\mathrm{Y}, \overline{\mathbb{Q}_l})$. Donc $\mathrm{K}_{(l,\iota)} = \sum_{w\in\mathbb{Z}} j_{!*}j^*\mathrm{K}_{(l,\iota),w} + i_* \sum_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{K}''_{(l,\iota),w}$, d'où la E-compatibilité de $(\sum_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{K}''_{(l,\iota),w})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$, qui implique la E-compatibilité de $(\mathrm{K}''_{(l,\iota),w})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ par l'hypothèse de récurrence, $\forall w \in \mathbb{Z}$. La E-compatibilité de $(\mathrm{K}_{(l,\iota),w})_{(l,\iota)\in\mathrm{I}}$ suit alors de (3.10.1). □

4 Indépendance de l et intégralité pour la cohomologie d'intersection

Soit X un schéma propre sur k purement de dimension d. On définit la cohomologie (resp. le complexe) d'intersection par

$$\mathrm{IH}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}_l}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, (\mathrm{IC}_\mathrm{X})_{\bar{k}}), (\text{resp. } \mathrm{IC}_\mathrm{X} = \mathrm{IC}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}) = (j_{!*}(\overline{\mathbb{Q}_l}[d]))[-d],)$$

où $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est une immersion ouverte dominante telle que $\mathrm{U}_{\mathrm{red}}$ soit lisse sur k. Notons que la normalisation ici diffère de celle dans [BBD, 0]. D'après 2.7, IC_X est pur de poids 0.

Théorème 4.1. *Soient* X *un schéma propre équidimensionnel sur* $k = \mathbb{F}_q$, l *un nombre premier* $\nmid q$. *Alors pour chaque* i, $\mathrm{P}_i(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{IH}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}_l}))$ *est dans* $\mathbb{Z}[t]$ *et indépendant de* l.

Démonstration. D'après 3.9 et 3.6,

$$\mathrm{L}(\mathrm{IC}_\mathrm{X}, t) = \det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}_{\bar{k}}, (\mathrm{IC}_\mathrm{X})_{\bar{k}}))^{-1} \in \mathbb{Q}(t)$$

et indépendant de l. Le morphisme $a : \mathrm{X} \to \operatorname{Spec} k$ est propre, donc $\mathrm{R}a_*\mathrm{IC}_\mathrm{X}$ est pur de poids 0. Il en résulte que $\mathrm{IH}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est pur de poids i, donc les $\mathrm{P}_i(t)$ peuvent être extraits de $\mathrm{L}(\mathrm{IC}_\mathrm{X}, t)$ de manière indépendante de l, et par suite les $\mathrm{P}_i(t)$ sont dans $\mathbb{Q}[t]$ et indépendants de l.

Il reste à démontrer l'intégralité. On peut supposer X réduit. Soit $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ une normalisation. Prenons $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ comme plus haut. Alors $j = fj'$ où $j' : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}'$ est une immersion ouverte. Donc $\mathrm{IC}_\mathrm{X} = f_*(\mathrm{IC}_{\mathrm{X}'}) = f_*(\oplus \mathrm{IC}_{\mathrm{X}_i})$, où X_i sont les composantes connexes de X'. Donc on peut supposer X intègre.

D'après [deJ, 4.1], on a une altération $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ génériquement étale telle que Y soit irréductible, lisse et projectif sur $\operatorname{Spec} k$. Prenons $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ un ouvert non vide tel que $\pi_\mathrm{V} : \mathrm{Y} \times_\mathrm{X} \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ soit un revêtement fini étale. Alors $\overline{\mathbb{Q}_l}$ sur V est un facteur direct de $\mathrm{R}\pi_{\mathrm{V}*}\pi_\mathrm{V}^*\overline{\mathbb{Q}_l} = j_\mathrm{V}^*\mathrm{K}$, où $j_\mathrm{V} : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{X}$, $\mathrm{K} = \mathrm{R}\pi_*\overline{\mathbb{Q}_l}$. Donc $\overline{\mathbb{Q}_l}[d]$ est facteur direct de $j_\mathrm{V}^*({}^p\mathrm{H}^d\mathrm{K})$, où $d = \dim \mathrm{X}$. Le complexe K étant pur, ${}^p\mathrm{H}^d\mathrm{K}$ l'est aussi, d'après 2.6. Donc $\mathrm{IC}_\mathrm{X}[d] = j_{\mathrm{V}!*}(\overline{\mathbb{Q}_l}[d])$ est facteur direct de ${}^p\mathrm{H}^d\mathrm{K}$, d'après 2.12. Il en résulte que $\mathrm{P}_i(t)$ est facteur de $\det(1 - t\,\mathrm{Fr}, \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}_l}))$, d'après 2.14. [2] Donc l'intégralité pour X découle de celle pour Y, qui est vraie d'après [De1] ou [SGA 7, XXIa, 5.2.2]. $\square$

On donnera une autre démonstration de l'intégralité au §5.

5 Appendice. Théorème d'intégralité

Dans cet appendice, on fixe un nombre premier $l \nmid q$. Soit T un ensemble de nombres premiers. Un élément de $\overline{\mathbb{Q}_l}$ est dit T-*entier* s'il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et entier sur $\mathbb{Z}[(1/t)_{t\in\mathrm{T}}]$. Soit X un schéma séparé de type fini sur $k = \mathbb{F}_q$. Un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit T-*entier* si pour tout $x \in |\mathrm{X}|$, les valeurs propres de l'action de Fr_x sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont T-entières. Des faisceaux T-entiers sont stables par sous-quotients et extensions. Un objet $\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est dit T-*entier* si tous ses faisceaux de cohomologie sont T-entiers. Cette notion est stable par $\otimes^\mathrm{L}, f^*, \mathrm{R}f_!$ [SGA 7, XXIa, 5.2.2].

Théorème 5.1. *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de schémas séparés de type fini sur* $\operatorname{Spec} k$ *et* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}^b_c(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ T-*entier. Alors* $\mathrm{R}f_*\mathrm{K}$ *est* T-*entier.*

Ce résultat est démontré dans [SGA 7, XXIa, 5.6] en supposant la résolution des singularités. On peut adapter la démonstration pour éliminer l'hypothèse de résolution. En fait, le premier usage de l'hypothèse de résolution (l. 4 de la démonstration [*ibid.*, p. 396]) peut être remplacé par [SGA $4\frac{1}{2}$, Finitude]. Pour le deuxième usage (bas de [SGA 7, XXIa, p. 397]), rappelons que l'on est dans le cas suivant

(5.1.1) X normal et $\mathrm{K} \simeq (\mathcal{G} \otimes_\mathrm{R} \mathrm{E}) \otimes_\mathrm{E} \overline{\mathbb{Q}_l}$, où $\mathcal{G}$ est un R-faisceau lisse tel que $\mathcal{G} \otimes_\mathrm{R} \mathrm{R}/\mathfrak{m}$ soit constant sur chaque composante connexe de X,

où E est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ convenable, R son anneau des entiers, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal.

Lemme 5.2. *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de schémas séparés de type fini sur* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec}\mathrm{F}$*, où* F *est un corps parfait. Alors il existe un diagramme*

2. Pour notre K ici, ${}^p\mathrm{H}^d\mathrm{K}$ est en fait facteur direct de $\mathrm{K}[d]$ ([BBD, 5.4.10] et [De4]).

commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}'_\bullet \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\epsilon"'] & \mathrm{Z}_\bullet \arrow[ddl, "g"] & \mathrm{D}_\bullet \arrow[l, hook'] \\ \mathrm{X} \arrow[d, "f"'] & & \\ \mathrm{Y} & & \end{tikzcd}$$

où ϵ *est un hyper-recouvrement propre et pour tout* n*,* j_n *est une immersion ouverte,* g_n *propre,* Z_n *lisse sur* S*,* D_n *un diviseur à croisements normaux dans* Z_n *de complémentaire* X_n*.*

Démonstration. Conséquence facile de [deJ, 4.1] et de [De2, 6.2]. Voir [Org, 2.6]. □

Alors

$$\mathrm{R}f_*\mathrm{K} = \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\epsilon_*\epsilon^*\mathrm{K} = \mathrm{R}g_*\mathrm{R}j_*\epsilon^*\mathrm{K},$$

donc on a une suite spectrale

$$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathcal{H}^q(\mathrm{R}g_{p*}\mathrm{R}j_{p*}\epsilon_p^*\mathrm{K}) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}f_*\mathrm{K}.$$

X'_p et $\epsilon_p^*\mathrm{K}$ satisfont encore (5.1.1), donc $\epsilon_p^*\mathrm{K}$ est lisse sur X'_p et modérément ramifié le long de D_p. D'après [SGA 7, XXIa, 5.6.1], la T-intégralité de $\epsilon_p^*\mathrm{K}$ implique la T-intégralité de $\mathrm{R}j_{p*}\epsilon_p^*\mathrm{K}$, qui donne alors la T-intégralité de $\mathrm{R}g_{p*}\mathrm{R}j_{p*}\epsilon_p^*\mathrm{K}$ car g_p est propre. Il en suit que $\mathrm{R}f_*\mathrm{K}$ est T-entier.

Corollaire 5.3. *Soient* $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ *un morphisme quasi-fini de schémas séparés de type fini sur* k *et* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}_c^b(\mathrm{Z}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *un faisceau pervers* T*-entier. Alors* $f_{!*}\mathrm{K}$ *est* T*-entier.*

Démonstration. Grâce à 5.1, on peut supposer que f soit une immersion ouverte $j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$. On applique 2.3 pour voir que

$$j_{!*}\mathrm{K} = \tau_{\leq -d_n-1}^{\mathrm{Y}_n}\mathrm{R}j_{n*}\cdots\tau_{\leq -d_1-1}^{\mathrm{Y}_1}\mathrm{R}j_{1*}\mathrm{K}.$$

La conclusion découle alors du Théorème 5.1. □

En prenant $\mathrm{T} = \emptyset$, on obtient que pour $a : \mathrm{X} \to \operatorname{Spec} k$ vérifiant l'hypothèse du théorème 4.1, $\mathrm{R}a_*\mathrm{IC}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est T-entier, *i. e.* les valeurs propres de Fr sur $\mathrm{IH}^i(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ sont entières sur $\mathbb{Z}$, ce qui donne une autre démonstration de l'intégralité dans le théorème 4.1.

Références

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.

[De1] P. Deligne. La conjecture de Weil : I, *Publ. math. IHÉS* **43** (1974), 273–308.

[De2] —— Théorie de Hodge : III, *Publ. math. IHÉS* **44** (1974), 5–77.

[De3] —— La conjecture de Weil : II, *Publ. math. IHÉS* **52** (1980), 137–252.

[De4] —— Décomposition dans la catégorie dérivée, dans *Motives*, 1994, 115–128.

[Eke] T. Ekedahl. On the adic formalism, dans *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, Birkhäuser, 1990.

[Fuji] K. Fujiwara. Independence of l for intersection cohomology (after Gabber), dans *Algebraic Geometry 2000, Azumino*, 2002, 145–151.

[deJ] A. J. de Jong. Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. math. IHÉS* **83** (1996), 51–93.

[Lau] G. Laumon. Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publ. math. IHÉS* **65** (1987), 131–210.

[Org] F. Orgogozo. Altérations et groupe fondamental premier à p, *Bull. Soc. math. Fr.* **131**, n° 1, 123–147 (2003).

[Tian] Y. Tian. Faisceaux pervers – propriétés géométriques, notes à rédiger.

[SGA $4\frac{1}{2}$] P. Deligne. *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 7, XXIa] —— Théorème d'intégralité, Exposé XXI, Appendice, *Groupe de monodromie en géométrie algébrique*, Vol. II, Springer-Verlag, 1973, 384–399.